Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

المؤثرات الخطية غير المحدودة على فضاءات هلبرت

Unbounded Linear Operators in Hilbert Spaces

سكينة عمر النجار

قسم الرياضيات–كلية التربية– جامعة مصراتة

Sukinaomar13@gmail.com

الملخص:

إن المؤثرات الخطية غير المحدودة على فضاء هلبرت هي أحد الموضوعات المهمة في الرياضيات وهي تلعب دوراً كبيراً في دراسة العديد من التطبيقات في مجال التحليل الدالي، ربما يرجع السبب في هذه التسمية إلي أن المؤثر الخطي غير المحدود ينقل المجموعات المحدودة في فضاء النطاق إلى مجموعات غير محدودة في فضاء المدى.

الكلمات المفتاحية: المؤثر الخطي غير المحدود، المؤثر المرافق الهلبرتي ،المؤثر المغلق.

Abstract:

Unbounded linear operators in Hilbert spaces is one of important topics in mathematics and it plays a great role in the stadying of many applications in functional analysis, this may be due to unbounded linear operators which transfer bouded sets in domain space to unbunded sets in range space.

(1) المقدمة:

تعتبر المؤثرات الخطية غير المحدودة أحد مواضيع الرياضيات التي لها أهمية كبيرة في دراسة العديد من التطبيقات، خاصة المرتبط بالمعادلات التفاضلية، وتعتبر فضاءات هلبرت القاعدة الأساسية لدراسة هذه المؤثرات ولتوضيح خواصه الأساسية تم دراسة المؤثرات المرافقة والمؤثرات المغلقة في هذا البحث.

تعريف 1

يعرف **المؤثر الخطي** T *(Linear Operator)* بأنه دالة من الفضاء الاتجاهي X إلى الفضاء الاتجاهي Y، المعرفان على نفس المجال K، بحيث إن:

$$T(\lambda x+\beta y)=\lambda Tx+\beta Ty \quad \text{لكل} \quad x,y\in X \quad \text{ولكل} \quad \lambda,\beta\in K$$

تعريف 2

إذا كان فضاء الضرب الداخلي $(X, \langle \ , \ \rangle)$ فضاءً نظيمياً تاماً، فإنه يسمى **فضاء هلبرت**.
الأمثلة الآتية لبعض الفضاءات التي تمثل فضاء هلبرت.

مثال 1

الفضاء R^n يمثل فضاء هلبرت حيث لكل $x, y \in R^n$ يعرف الضرب الداخلي والنظيم بالعلاقة:

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

مثال 2

الفضاء $\mathbb{C}^n$ يمثل فضاء هلبرت حيث لكل $x, y \in \mathbb{C}^n$ يعرف الضرب الداخلي والنظيم كما يلي:

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

تعريف3

إذا كان $T : D(T) \to H$ مؤثراً خطياً، حيث $D(T)$ فضاء جزئي من فضاء هلبرت المركب H، فإن T يسمى مؤثراً خطياً غير محدود إذا كان لكل $M > 0$ يوجد على الأقل $x \in D(T)$ بحيث إن $\|T(x)\| \geq M$.

في عام 1910 توصل العالمان (E. Hellinger) و (O. Toeplitz) إلى نتيجة مهمة هي أنه إذا كان T مؤثراً خطياً غير محدودٍ معرف على فضاء هلبرت المركب H ويحقق:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \text{لكل} \quad x \in D(T) \ , \ y \in D(T)$$

فإنه لا يمكن أن يكون $D(T) = H$.

مبرهنة 1 (Hellinger–Toeplitz Theorem)

إذا كان T مؤثراً خطياً معرفاً على كل فضاء هلبرت المركب H ويحقق أن $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ لكل $x, y \in H$، فإن T يكون محدوداً.

البـرهان

لنفرض أن لدينا المتتالية $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ بحيث إن:

$$\|y_n\| = 1 \quad , \quad \|Ty_n\| \to \infty$$

وندرس الدالية الخطية f_n المعرفة على كل الفضاء H كالتالي:

$$f_n(x) = \langle Tx, y_n\rangle = \langle x, Ty_n\rangle \quad ; \quad n = 1,2,3,...$$

لكل n الدالية f_n تكون محدودة لأنه من متباينة كوشي–شوارتز نجد أن:

$$|f_n(x)| = |\langle x, Ty_n\rangle| \leq \|Ty_n\| \|x\| \qquad (1)$$

وأكثر من ذلك، فإن لكل نقطة ثابتة $x \in H$ المتتالية $\{f_n(x)\}$ تكون محدودة، لأن $\|y_n\| = 1$ ومن متباينة كوشي–شوارتز نجد أن:

$$|f_n(x)| = |\langle Tx, y_n\rangle| \leq \|Tx\|$$

ولذلك فإنه من مبدأ المحدودية المنتظمة نستنتج أن المتتالية $\{\|f_n\|\}$ متتالية محدودة ولدينا:

$\|f_n\| \leq k$ لكل n

إذن لكل $x \in H$ لدينا:

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\| \|x\| \leq k\|x\|$$

ومن (1) وبوضع $x = Ty_n$ نحصل على:

$$\|Ty_n\|^2 = \langle Ty_n, Ty_n \rangle = |f_n(Ty_n)| \le k\|Ty_n\|$$

أي أن $\|Ty_n\| \le k$، وهذا يناقض الفرض $\|Ty_n\| \to \infty$.

إذن T مؤثر خطي محدود.

في حالة المؤثرات الخطية المحدودة، يكون المؤثر المرافق الهلبرتي T^* معرفاً بحيث يحقق:

$$y^* = T^* y \quad ; \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle \quad \text{لكل} \quad x, y \in H$$

و T^* معرف على H وهو مؤثر خطي محدود ويكون $\|T\| = \|T^*\|$.

ولكي يكون T^* معرفاً أيضاً في حالة المؤثرات الخطية غير المحدودة يجب أن يكون T **معرفاً بكثافة** (Densely Defined) في H، أي أن $\overline{D(T)} = H$.

فإذا كان $\overline{D(T)} \ne H$ ، فإن المجموعة المكملة المتعامدة (Orthogonal Complement) لـ $\overline{D(T)}$ في H تحوي عنصراً غير صفري y_1 ويكون $y_1 \perp x$ لكل $x \in D(T)$، أي أن $\langle x, y_1 \rangle = 0$، عندئذٍ:

$$\langle x, y^* \rangle = \langle x, y^* \rangle + \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y^* + y_1 \rangle$$

وهذا يبين عدم الوحدانية لـ y^*.

ولكن إذا كان $\overline{D(T)} = H$، فإن $D(T)^\perp = \{0\}$ وعندئذ $\langle x, y_1 \rangle = 0$ لكل $x \in D(T)$ يؤدى إلى أن $y_1 = 0$ أي أن $y^* + y_1 = y^*$، وهذا يعني أن y^* وحيد، وبالتالي يكون T^* موجوداً.

تعريف 4

ليكن $T:D(T)\rightarrow H$ مؤثراً خطياً معرفاً بكثافة في فضاء هلبرت المركب H.
عندئذٍ المؤثر المرافق الهلبرتي $T^*:D(T^*)\rightarrow H$ للمؤثر T يكون معرفاً بحيث لكل $y\in H$ يوجد $y^*\in H$ يحقق أن:

$$y^*=T^*y \quad , \quad \langle Tx,y\rangle=\langle x,y^*\rangle \text{ لكل } x\in D(T)$$

تعريف 5

إذا كان $S:D(S)\rightarrow H$ و $T:D(T)\rightarrow H$ مؤثرين خطيين معرفين بكثافة في فضاء هلبرت المركب H، فإن:

أ) $S+T$ مؤثر خطي ويكون $D(S+T)=D(S)\cap D(T)\neq\varnothing$ ولكل $x\in D(S+T)$ يكون:

$$(S+T)x=Sx+Tx$$

ب) ST مؤثر خطي ويكون $D(ST)=D(S)\cap T^{-1}D(T)$ ولكل $x\in D(ST)$ يكون:

$$(ST)x=S(Tx)$$

ويمكن تعميم ذلك لعدد k من المؤثرات الخطية المعرفة بكثافة في H.

جـ) إذا كان T مؤثر فوقي، فإن T^{-1} موجود، ويكون $D(T^{-1})=R(T)$ و $R(T^{-1})=D(T)$ بحيث $TT^{-1}=I_{R(T)}$ و $T^{-1}T=I_{D(T)}$.

د) إذا كان $T\ ,\ S$ كلاهما مؤثرين فوقيين، فإن:

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

ملاحظة (1)

مجموعة المؤثرات الخطية غير المحدودة لا تمثل فضاء اتجاهي لعدم توفر العنصر المحايد.

تعريف 6

إذا كان $S : D(S) \to H$ و $T : D(T) \to H$ مؤثرين خطيين معرفين بكثافة في فضاء هلبرت المركب H، فإن T يسمى تمديد للمؤثر S إذا كان $D(S) \subseteq D(T)$ و $S(x) = T|_{D(S)}(x)$ لكل $x \in D(S)$، ويسمى التمديد T للمؤثر S تمديداً فعلياً إذا كان $D(S)$ مجموعة جزئية فعلية من $D(T)$ أي أن $D(T) - D(S) \neq \varnothing$.

(2) المؤثرات المرافقة Adjoint Operators

ندرس في هذا البند بعض خواص المؤثرات المرافقة الهلبرتية والمؤثرات المرافقة ذاتياً.

مبرهنة 2

إذا كان $S : D(S) \to H$ و $T : D(T) \to H$ مؤثران خطيان معرفان بكثافة في فضاء هلبرت المركب H، فإن:

أ) إذا كان $S \subset T$، فإن $T^* \subset S^*$.

ب) إذا كان $D(T^*)$ كثيف في H، فإن $T \subset T^{**}$.

البرهان

أ) من تعريف المؤثر المرافق الهلبرتي T^* نجد أن:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \text{لكل} \quad x \in D(T) \; , \; y \in D(T^*) \qquad (2)$$

وبما أن $S \subset T$ ، فإن:

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \quad \text{لكل} \quad x \in D(S) \ , \ y \in D(T^*) \qquad (3)$$

ومن تعريف المؤثر المرافق الهلبرتى S^* نجد أن:

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^* y\rangle \quad \text{لكل} \quad x \in D(S) \ , \ y \in D(S^*) \qquad (4)$$

من (3) و (4) نستنتج أن $D(T^*) \subset D(S^*)$ وبالتالي، فإن $S^* y = T^* y$ لكل $y \in D(T^*)$ ، وهذا يعني أن $T^* \subset S^*$.

(ب) بأخذ المرافق المركب في (2) نحصل على:

$$\langle T^* y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad \text{لكل} \quad x \in D(T) \ , \ y \in D(T^*) \qquad (5)$$

وحيث إن $D(T^*)$ كثيف في H فإن المؤثر T^{**} موجود ولدينا:

$$\langle T^* y, x\rangle = \langle y, T^{**} x\rangle \quad \text{لكل} \quad y \in D(T^*) \ , \ x \in D(T^{**}) \qquad (6)$$

من (5) و (6) نستنتج أنه إذا كان $x \in D(T)$ ، فإن $x \in D(T^{**})$ ، أي أن $T^{**} x = Tx$ لكل $x \in D(T)$ ، وبالتالي فإن $T \subset T^{**}$.

توضح المبرهنة التالية الشروط اللازمة لكي يكون معكوس المؤثر المرافق مساوياً لمرافق المؤثر المعكوس.

مبرهنة 3

إذا كان $T : D(T) \to H$ مؤثراً خطياً معرفاً بكثافة في فضاء هلبرت المركب H، وإذا كان T فوقياً و $R(T)$ كثيفاً في H، فإن T^* فوقي ولدينا $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

البـرهان

بما أن T معرف بكثافة في H، فإن T^* موجود وكذلك T^{-1} موجود (لأن T فوقي). وبما أن $D(T^{-1})=R(T)$ كثيف في H، فإن $(T^{-1})^*$ موجود.

الآن نبين أن $(T^*)^{-1}$ موجود وأن $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$:-

ليكن $y\in D(T^*)$ ، فإنه لكل $x\in D(T^{-1})$ لدينا $T^{-1}x\in D(T)$. و:

$$\langle T^{-1}x,T^*y\rangle=\langle TT^{-1}x,y\rangle=\langle x,y\rangle \qquad (7)$$

ومن تعريف المؤثر المرافق الهلبرتى للمؤثر T^{-1} نجد أن:

$$\langle T^{-1}x,T^*y\rangle=\langle x,(T^{-1})^*T^*y\rangle \quad \text{لكل} \quad x\in D(T^{-1})$$

وهذا يبين أن $T^*y\in D\left((T^{-1})^*\right)$ ، وبمقارنة ذلك مع (7) نستنتج أن:

$$(T^{-1})^*T^*y=y \quad , \quad y\in D(T^*) \qquad (8)$$

ونلاحظ أنه إذا كان $T^*y=0$ ، فإن $y=0$ وبذلك فإن $(T^*)^{-1}:R(T^*)\to D(T^*)$ موجود، وبما أن $(T^*)^{-1}T^*=I_{D(T^*)}$ وبالمقارنة مع (8) فإن:

$$(T^*)^{-1}\subset(T^{-1})^* \qquad (9)$$

الآن لأي $x\in D(T)$ و $y\in D\left((T^{-1})^*\right)$ يكون $Tx\in R(T)=D(T^{-1})$ و:

$$\langle Tx,(T^{-1})^*y\rangle=\langle T^{-1}Tx,y\rangle=\langle x,y\rangle \qquad (10)$$

ومن تعريف المؤثر المرافق الهلبرتى للمؤثر T نجد أن:

$$\langle Tx,(T^{-1})^*y\rangle=\langle x,T^*(T^{-1})^*y\rangle \quad \text{لكل} \quad x\in D(T)$$

وبذلك فإنه من (10) نستنتج أن $(T^{-1})^* y \in D(T^*)$ وأن:

$$T^*(T^{-1})^* y = y \quad , \quad y \in D\left((T^{-1})^*\right) \qquad (11)$$

إذن $T^*(T^*)^{-1}$ يكون المؤثر المحايد في $D\left((T^*)^{-1}\right) = R(T^*)$ و $(T^*)^{-1} : R(T^*) \to D(T^*)$ يكون فوقياً، وبالمقارنة مع (11) نجد أن $D\left((T^{-1})^*\right) \subset D\left((T^*)^{-1}\right)$، وبالتالي فإن:

$$(T^{-1})^* \subset (T^*)^{-1} \qquad (12)$$

إذن من (9) و (12) نستنتج أن $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

المؤثر الخطي المحدود T يكون مرافقاً ذاتياً إذا كان $T = T^*$، ولكي نعمم ذلك في حالة المؤثرات الخطية غير المحدودة ندرس المؤثر المتماثل الذي يعرف كالتالي:

تعريف 7

ليكن $T : D(T) \to H$ مؤثراً خطياً معرفاً بكثافة في فضاء هلبرت المركب H. عندئذ T يسمى **مؤثراً خطياً متماثلاً** إذا كان:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \text{لكل} \quad x, y \in D(T)$$

مبرهنة 4

المؤثر الخطي T المعرف بكثافة في فضاء هلبرت المركب H يكون متماثلاً إذا وإذا كان فقط $T \subset T^*$.

البرهان

لنفرض أن $T \subset T^*$.

من تعريف المؤثر المرافق الهلبرتى T^* نجد أن:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \quad \text{لكل} \quad x \in D(T) \quad , \quad y \in D(T^*) \qquad (13)$$

وحيث أن $T \subset T^*$ فإن $T^* y = Ty$ لكل $y \in D(T)$ ، لذلك لكل $x, y \in D(T)$ يكون $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ ، وهذا يعني أن T مؤثر خطي متماثل.

ولبرهنة الاتجاه الآخر، نفرض أن T مؤثر خطي متماثل، وهذا يعني أن $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ لكل $x, y \in D(T)$ ، وبالمقارنة مع (13) نجد أن $D(T) \subset D(T^*)$ و $T = T^*\big|_{D(T)}$ ، وبالتالي فإن $T \subset T^*$.

الآن يمكننا تعريف الترافق الذاتي كالتالي.

تعريف 8

ليكن $T : D(T) \to H$ مؤثراً خطياً معرفاً بكثافة في فضاء هلبرت المركب H، عندئذٍ T يسمى مؤثر خطي مرافق ذاتياً إذا كان $T = T^*$.

ملاحظة (2)

الترافق الذاتي والتماثل متكافئان في حالة المؤثرات الخطية المحدودة، حيث يكون $D(T) = H$ ، ولكن في حالة المؤثرات الخطية غير المحدودة يكون كل مؤثر خطي مرافق ذاتياً متماثلاً والعكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحا، فربما يكون T^* تمديداً فعلياً للمؤثر T، أي أن $D(T) \neq D(T^*)$ ، والمثال على ذلك المؤثر التفاضلي المعرف كالآتي:

$$T : D(T) \to L^2[0,2\pi]$$
$$f \to if' \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

حيث تكون f دالة مستمرة مطلقاً على الفترة $[0,2\pi]$ ويكون

$$D(T) = \{f \in L^2[0,2\pi] \ ; \ f(0) = 0 = f(2\pi) \ , \ f' \in L^2[0,2\pi]\}$$

نتيجة (**1**)

إذا كان T مؤثراً خطياً معرفاً بكثافة في فضاء هلبرت المركب H، فإن T متماثل إذا وإذا كان فقط $\langle Tx,x\rangle$ حقيقياً لكل $x \in D(T)$.

3) المؤثرات الخطية المغلقة Closed Linear Operators

للمؤثرات الخطية المغلقة أهمية كبيرة في دراسة المؤثرات الخطية غير المحدودة، فمعظم المؤثرات الخطية غير المحدودة تكون مغلقة أو على الأقل لها تمديد خطي مغلق (Closed Linear Extension)

تعريف 9

ليكن $T: D(T) \to H$ مؤثراً خطياً، $D(T) \subset H$ حيث H فضاء هلبرت المركب. عندئذ T يسمى **مؤثراً خطياً مغلقاً** (Closed Linear Operator) إذا كان بيان T وهو المجموعة:

$$G(T) = \{(x,y) : x \in D(T)\,,\, y = Tx\}$$

مغلقاً في $H \times H$، حيث يعرف النظيم على $H \times H$ كالتالي:

$$\|(x,y)\| = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{1/2}$$

ويعرف الضرب الداخلي كالتالي:

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = \langle x_1,x_2\rangle + \langle y_1,y_2\rangle \text{ لكل } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in H \times H$$

مبرهنة 5

ليكن $T: D(T) \to H$ مؤثراً خطياً و $D(T) \subset H$ حيث H فضاء هلبرت المركب، عندئذٍ

(أ) T مغلق إذا وإذا كان فقط لكل متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(T)$ حيث $x_n \to x$, $Tx_n \to y$ يكون $x \in D(T)$ و $Tx = y$.

(ب) إذا كان T مغلقاً، و $D(T)$ مغلقاً في H، فإن T يكون محدوداً.

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

(جـ) إذا كان T محدوداً، فإن T يكون مغلقاً إذا وإذا كان فقط $D(T)$ مغلقاً في H.

مبرهنة 6

المؤثر المرافق الهلبرتى المعرف في التعريف (4) يكون مغلقاً.

البرهان

لبرهنة أن T^* مغلق، ندرس أي متتالية $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ في $D(T^*)$ بحيث:

$$T^* y_n \to z_0 \quad , \quad y_n \to y_0$$

ونبين أن $y_0 \in D(T^*)$, $z_0 = T^* y_0$.

من تعريف المؤثر المرافق الهلبرتى T^* نجد أن:

$$\langle Ty, y_n \rangle = \langle y, T^* y_n \rangle \quad \text{لكل} \quad y \in D(T)$$

وبما أن عملية الضرب الداخلي مستمرة، فإنه عندما $n \to \infty$ نحصل على:

$$\langle Ty, y_0 \rangle = \langle y, z_0 \rangle \quad \text{لكل} \quad y \in D(T)$$

وحيث أن $\langle Ty, y_0 \rangle = \langle y, T^* y_0 \rangle$، فإن $y_0 \in D(T^*)$, $z_0 = T^* y_0$، وبتطبيق المبرهنة (5) الفقرة (أ) على T^* نستنتج أن T^* مغلق.

مبرهنة 7

إذا كان T مؤثراً خطياً مغلقاً ومعرفاً بكثافة في فضاء هلبرت المركب H، فإن T^* يكون كذلك معرف بكثافة في H، وأكثر من ذلك يكون $T^{**} = T$.

نتيجة (2)

إذا كان T مؤثراً خطياً معرفاً بكثافة في فضاء هلبرت المركب H، فإن $D(T^*)$ كثيف في H إذا وإذا كان فقط للمؤثر T تمديد خطي مغلق، وأكثر من ذلك كل تمديد خطي مغلق للمؤثر T يكون كذلك تمديداً للمؤثر T^{**}.

البرهان

لنفرض أن $D(T^*)$ كثيف في H، عندئذ T^* موجود و $T \subset T^{**}$ حسب المبرهنة (1.2.3)، وحيث إن $T^{**} = (T^*)^*$ فإنه حسب المبرهنة (6) يكون T^{**} مغلقاً، وبالتالي فإن T له تمديد خطي مغلق.

ولبرهنة الإتجاه الآخر، نفرض أن T له تمديد خطي مغلق وليكن S أي أن $D(T) \subset D(S)$، وحيث إن $D(T)$ كثيف في H، فإن $D(S)$ يكون كذلك، إذن حسب المبرهنة السابقة يكون $D(S^*)$ كثيفاً في H ويكون $S = S^{**}$.

وبما أن $T \subset S$ يؤدى إلى أن $S^* \subset T^*$ فهذا يعني أن $D(T^*)$ كثيف في H.

الآن $S = S^{**} \subset T^{**} \subset T$ يبين أن S تمديد للمؤثر T^{**}. $\triangle$

من الخواص المهمة التي يجب التعرض إليها في هذا البند قابلية الإنغلاق والغلاقة للمؤثرات الخطية.

تعريف 10

ليكن T مؤثراً خطياً و T_1 مؤثراً خطياً مغلقاً و $T \subset T_1$.

عندئذٍ يكون T مؤثر خطي قابل للانغلاق؛ ويسمى T_1 **تمديداً خطياً مغلق**اً للمؤثر T.

ويسمى التمديد الخطي المغلق $\hat{T}$ للمؤثر الخطي القابل للانغلاق T **أدنى تمديد** (Minimal Extension) للمؤثر T إذا كان كل تمديد خطي مغلق T_1 للمؤثر T يكون تمديداً خطياً مغلقاً للمؤثر $\hat{T}$ وأدنى تمديد $\hat{T}$ للمؤثر T إن وجد يكون وحيداً ويسمى **غلاقة** المؤثر T.

وفي حالة المؤثرات الخطية المتماثلة يكون من السهل أن نبين أن $\hat{T}$ إن وجد يكون وحيداً والمبرهنة التالية تشير إلى هذا.

مبرهنة 8

ليكن $T : D(T) \to H$ مؤثراً خطياً معرفاً بكثافة في فضاء هلبرت المركب H. عندئذٍ إذا كان T متماثلاً، فإن غلاقته $\hat{T}$ موجودة ووحيدة.

المبرهنة التالية توضح أن المؤثر المرافق الهلبرتى لغلاقة المؤثر الخطي المتماثل يساوي المؤثر المرافق الهلبرتى لنفس المؤثر الخطي المتماثل.

مبرهنة 9

إذا كان T مؤثراً خطياً متماثلاً معرفاً كما في المبرهنة السابقة فإن $(\hat{T})^* = T^*$.

البرهان

بما أن $T \subset \hat{T}$، فإن $(\hat{T})^* \subset T^*$ حسب المبرهنة (2) وبالتالي فإن:

$$D\left((\hat{T})^*\right) \subset D(T^*) \qquad (14)$$

الآن نفرض أن $y \in D(T^*)$ ونبين أن $y \in D\left((\hat{T})^*\right)$، وهذا يعني أن نبرهن أن لكل $x \in D(\hat{T})$ يكون:

$$\left\langle \hat{T}x, y \right\rangle = \left\langle x, (\hat{T})^* y \right\rangle = \left\langle x, T^* y \right\rangle \qquad (15)$$

حيث $\left\langle x, (\hat{T})^* y \right\rangle = \left\langle x, T^* y \right\rangle$ نحصل عليها من $(\hat{T})^* \subset T^*$.

بما أن $T \subset \hat{T}$، فإنه لكل $x \in D(\hat{T})$ توجد متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ في $D(T)$ بحيث إن:

$$x_n \to x \quad , \quad Tx_n \to y_0 = \hat{T}x$$

وحيث أن $x_n \in D(T)$, $y \in D(T^*)$ فإنه من تعريف المؤثر المرافق الهلبرتى نجد أن $\left\langle Tx_n, y \right\rangle = \left\langle x_n, T^* y \right\rangle$، وحيث إن عملية الضرب الداخلى مستمرة فإنه عندما $n \to \infty$

نحصل على:

$$\langle \hat{T}x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \quad , \quad x \in D(\hat{T})$$

المصادر والمراجع:

1. Angus E. Taylor and David C. Lay, Introduction to Functional Analysis, John wiley and sons, Inc. 1979.
2. Bachman G. and Narici L, Functional Analysis, Academic press, Inc. 1966.
3. Carl L. Devito, Functional Analysis and Linear Operator Theory, Addisson Wesley publishing, Inc. 1990.
4. D. H. Griffel, Applied Functional Analysis, Ellis Horwod Limited Publishers, Inc. 1981.
5. John B. Conway, A Course in Functional Analysis, second edition, Springer-Verlag, NewYork, Inc. 1990.
6. Kreyszig E, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, Inc. 1978.
7. Adrian Heathgote, Unbounded Operators and The Incompleteness of Quantum Mechanics, Philosophy of Science, 57, 1990.
8. Boli, Elements of Hilbert Space and Operator Theory with Application to Integral Equations, May 30, 2005.